

Contrôle de systèmes hyperboliques par analyse Lyapunov

Pierre-Olivier Lamare

Directeurs de thèse : Antoine Girard et Christophe Prieur



Université
Joseph Fourier
GRENOBLE



28 Septembre 2015

Ce travail a été soutenu par le LabEx PERSYVAL-Lab (ANR-11-LABX-0025-01)
financé par le programme français Investissement d'avenir

Contexte

Étude de systèmes hyperboliques linéaires, c'est-à-dire

$$\partial_t y(t, x) + \Lambda(t, x) \partial_x y(t, x) = F(t, x) y(t, x), \quad (1)$$

avec $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $y \in \mathbb{R}^n$, avec condition aux bords

$$B(y(t, 0), y(t, 1), u(t)) = 0, \quad (2)$$

où $B \in C^1(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}, \mathbb{R}^q; \mathbb{R}^n)$, \mathcal{Z} un sous-ensemble connecté non vide de \mathbb{R}^n , et condition initiale

$$y(0, x) = y^0(x). \quad (3)$$

Exemples de systèmes hyperboliques

- ▶ Contrôle de trafic routier [Bressan, Han ; 11], [Garavello, Piccoli ; 06], [Gugat, Herty, Klar, Leugering ; 06]...
- ▶ Contrôle de réseaux de gaz [Gugat, Herty ; 11], [Gugat, Dick, Leugering ; 11]...
- ▶ **Contrôle de réseaux d'irrigation, équations de Saint-Venant (exemple considéré dans cette présentation)** [Bastin, Coron, d'Andréa-Novel ; 09]...

Plan

I. Calcul de fonctions Lyapunov par optimisation

II. Systèmes hyperboliques à commutation

III. Génération de trajectoire et poursuite

IV. Conclusion et perspectives

Convergence exponentielle globale

Soit E un espace fonctionnel de fonctions $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont la norme associée est notée $|\cdot|_E$.

Définition

Le système (1)–(3) est *Globalement Exponentiellement Convergent* pour $|\cdot|_E$ si $\exists \nu > 0$ et une fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tels que, $\forall y^0 \in E$, les solutions de (1)–(3) satisfont

$$|y(t, \cdot)|_E \leq e^{-\nu t} g(|y^0|_E), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (4)$$

Le système (1)–(3) est dit *Globallement Exponentiellement Stable* (GES) si g peut être choisie linéaire.

I. Calcul de fonctions Lyapunov par optimisation

Considérons le cas $\Lambda(t, x) = \Lambda(x)$, $F(t, x) = F(x)$ et

$$B(y(t, 0), y(t, 1), u(t)) = \begin{bmatrix} y^-(t, 1) \\ y^+(t, 0) \end{bmatrix} - G \begin{bmatrix} y^-(t, 0) \\ y^+(t, 1) \end{bmatrix}.$$

Soit la fonction

$$V(y) = \int_0^1 y^\top(x) |\Lambda(x)|^{-1} Q(x) y(x) dx, \quad (5)$$

où le noyau peut être « exponentiel » [Coron, Bastin et d'Andréa-Novel ; 08]

$$Q(x) = \text{diag} [e^{2\mu x} Q^-, e^{-2\mu x} Q^+] . \quad (6)$$

Analyse de stabilité

En supposant $Q(x)\Lambda(x) = \Lambda(x)Q(x)$, la dérivée temporelle de V le long des trajectoires du système (1), (2) est

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2 \int_0^1 y_t^\top(t, x) |\Lambda(x)|^{-1} Q(x) y(t, x) dx \\ &= -2 \int_0^1 y^\top(t, x) \tilde{I}_{n,m} Q(x) y_x(t, x) dx \\ &\quad + 2 \int_0^1 y^\top(t, x) Q(x) |\Lambda(x)|^{-1} F(x) y(t, x) dx. \quad (7)\end{aligned}$$

Fin du calcul

On a $-2y^\top \tilde{I}_{n,m} Q y_x = -\left(y^\top \tilde{I}_{n,m} Q y\right)_x - 2\mu y^\top Q y$ aussi

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \begin{bmatrix} y^-(t,0) \\ y^+(t,1) \end{bmatrix}^\top \left[\begin{bmatrix} I_m & 0_{m,n-m} \\ G_{+-} & G_{++} \end{bmatrix}^\top \tilde{I}_{n,m} Q(0) \begin{bmatrix} I_m & 0_{m,n-m} \\ G_{+-} & G_{++} \end{bmatrix} \right. \\ & - \left. \begin{bmatrix} G_{--} & G_{-+} \\ 0_{n-m,m} & I_{n-m} \end{bmatrix}^\top \tilde{I}_{n,m} Q(1) \begin{bmatrix} G_{--} & G_{-+} \\ 0_{n-m,m} & I_{n-m} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} y^-(t,0) \\ y^+(t,1) \end{bmatrix} \\ & + 2 \int_0^1 y^\top(t,x) Q(x) |\Lambda(x)|^{-1} F(x) y(t,x) dx \\ & - 2\mu \int_0^1 y^\top(t,x) Q(x) y(t,x) dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Conditions de stabilité

Proposition

Si $\exists \nu > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ et des mat. sym. déf. pos. $Q^- \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $Q^+ \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ tels que pour $Q(x)$ donnée par (6) les conditions suivantes sont satisfaites $\forall x \in [0, 1]$,

$$Q(x)\Lambda(x) = \Lambda(x)Q(x), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & -2\mu Q(x) + F^\top(x) |\Lambda(x)|^{-1} Q(x) \\ & + Q(x) |\Lambda(x)|^{-1} F(x) \leq -2\nu |\Lambda(x)|^{-1} Q(x), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_m & 0_{m,n-m} \\ G_{+-} & G_{++} \end{bmatrix}^\top \tilde{I}_{n,m} Q(0) \begin{bmatrix} I_m & 0_{m,n-m} \\ G_{+-} & G_{++} \end{bmatrix} \\ & \leq \begin{bmatrix} G_{--} & G_{-+} \\ 0_{n-m,m} & I_{n-m} \end{bmatrix}^\top \tilde{I}_{n,m} Q(1) \begin{bmatrix} G_{--} & G_{-+} \\ 0_{n-m,m} & I_{n-m} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

alors le système (1)–(3) est GES pour la norme L^2 .

Relation entre conditions de stabilité et systèmes LPV.

Proposition

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Les conditions (10), (11) sont satisfaites ssi le système LPV temps-continu

$$\dot{p}(t) = \text{diag} [e^{2\mu x} I_m, e^{-2\mu x} I_{n-m}] \left(|\Lambda(x)|^{-1} F(x) - \mu I_n \right) p(t), \quad (12)$$

$x \in [0, 1]$, et le système temps-discret

$$h(t+1) = \text{diag} [I_m, e^{-\mu} I_{n-m}] e^{\mu} G \text{diag} [I_m, e^{\mu} I_{n-m}] h(t) \quad (13)$$

partagent une mat. Lyapunov diag. par bloc $\text{diag} [Q^-, Q^+]$, où $Q^- \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $Q^+ \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ sont sym. déf. pos.

Sur-approximation des contraintes

Pb : $x \in [0, 1]$ dans inégalités matricielles \Rightarrow infinité de contraintes

Solution : Sur-approximer par des polytopes

Voir [Hetel, Daafouz, lung; 06] pour les systèmes à retard.

Sur-approximation des contraintes

À μ fixé dans \mathbb{R} , Q^- dans $\mathbb{R}^{m \times m}$ et Q^+ dans $\mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, on note

$$Q_{ij} = \text{diag} [e^{2\mu i} Q^-, e^{-2\mu j} Q^+] , \quad i, j = 0, 1. \quad (14)$$

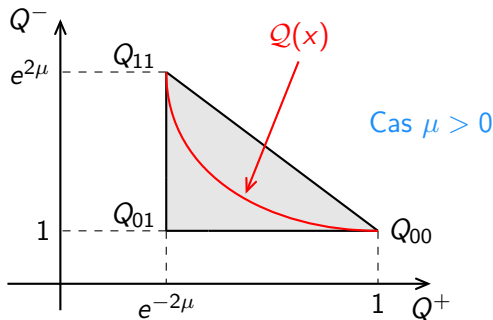


Figure: Sur-approximation de la « courbe » $Q(x)$ dans le plan (Q^-, Q^+) .

Sur-approximation des contraintes

À μ fixé dans \mathbb{R} , Q^- dans $\mathbb{R}^{m \times m}$ et Q^+ dans $\mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, on note

$$Q_{ij} = \text{diag} [e^{2\mu i} Q^-, e^{-2\mu j} Q^+] , \quad i, j = 0, 1. \quad (14)$$

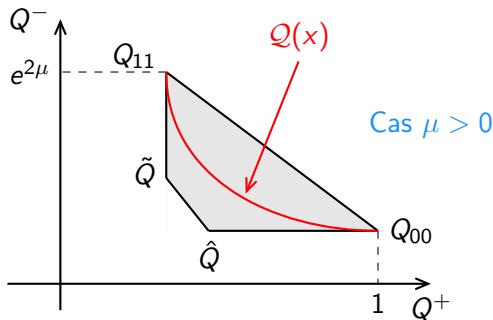


Figure: Sur-approximation de la « courbe » $Q(x)$ dans le plan (Q^-, Q^+) .

Proposition (Cas F et Λ constants)

Si $\exists \nu > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ et des mat. sym. déf. pos. $Q^- \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $Q^+ \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ tels que

$$Q_{ij}\Lambda = \Lambda Q_{ij}, \quad (15)$$

$$-2\mu Q_{ij} + F^\top |\Lambda|^{-1} Q_{ij} + Q_{ij} |\Lambda|^{-1} F \leq -2\nu |\Lambda|^{-1} Q_{ij}, \quad (16)$$

soient satisfaits $\forall (i, j) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ si $\mu > 0$ et $\forall (i, j) \in \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$ si $\mu < 0$, avec

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_m & 0_{m, n-m} \\ G_{+-} & G_{++} \end{bmatrix}^\top Q_{00} \tilde{I}_{n,m} \begin{bmatrix} I_m & 0_{m, n-m} \\ G_{+-} & G_{++} \end{bmatrix} \\ & \leq \begin{bmatrix} G_{--} & G_{-+} \\ 0_{n-m, m} & I_{n-m} \end{bmatrix}^\top Q_{11} \tilde{I}_{n,m} \begin{bmatrix} G_{--} & G_{-+} \\ 0_{n-m, m} & I_{n-m} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (17)$$

alors les conditions (9), (10) et (11) sont satisfaites $\forall x \in [0, 1]$.

Exemple

Considérons les matrices suivantes

$$\Lambda = \text{diag}[-3, 1], \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

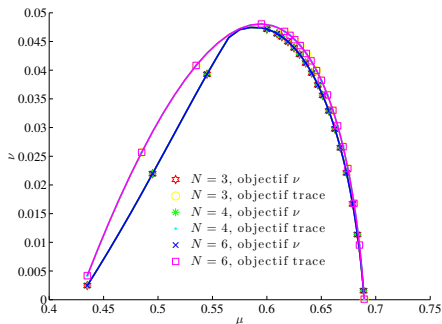


Figure: Évolution de ν en fonction de μ .

Synthèse de contrôleurs : contrôle frontière

Supposons maintenant que

$$G = T + LK_B, \quad (18)$$

où les matrices $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ($n > q$) sont données et la matrice $K_B \in \mathbb{R}^{q \times n}$ doit être construite telle que le système (1)–(3) avec la condition au bord (2) est GES.

Théorème

Si $\exists \nu > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ une mat. $U \in \mathbb{R}^{q \times n}$ et des mat. sym. déf. pos.

$S^- \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $S^+ \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ tels que, avec

$S(x) = \text{diag} [e^{-2\mu x} S^-, e^{2\mu x} S^+]$, les conditions suivantes sont satisfaites, $\forall x \in [0, 1]$,

$$S(x)\Lambda(x) = \Lambda(x)S(x), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & -2\mu S(x) + S(x)F^\top(x) |\Lambda(x)|^{-1} \\ & + |\Lambda(x)|^{-1} F(x)S(x) \leq -2\nu S(x) |\Lambda(x)|^{-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \text{diag} [S^-, e^{-2\mu} S^+] & (TS(0) + LU)^\top \\ TS(0) + LU & \text{diag} [e^{-2\mu} S^-, S^+] \end{bmatrix} \geq 0, \quad (21)$$

alors le contrôle frontière donné par (18) est tel qu'avec

$$K_B = US^{-1}(0), \quad (22)$$

le système (1)–(3) est GES pour la norme L^2 .

Exemple synthèse de contrôleur frontière

Soient les matrices

$$\Lambda = \text{diag}[-1, 2], F = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & -0.8 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, L^T = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

On choisit $\nu = 0.1$. L'algorithme donne

$$\mu = 0.1580,$$

$$K_B = \begin{bmatrix} 0.5596 & 0.7910 \end{bmatrix},$$

ainsi

$$G = \begin{bmatrix} -0.2202 & 1.3955 \\ -0.0596 & 0.2090 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

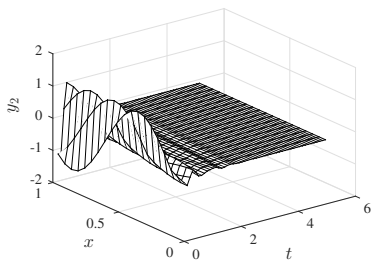
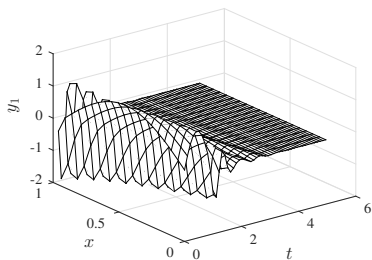


Figure: Évolution de y_1 et y_2 .

- ▶ Les inégalités matricielles pour la synthèse de contrôleurs peuvent être sur-approximées comme dans le cas de l'analyse.
- ▶ Les résultats précédents peuvent être adaptés avec le noyau $Q(x)$ affine.
- ▶ Dans le cas où F et Λ ne sont pas constantes les résultats de sur-approximations sont construits en supposant que les matrices paramétrées

$$W(x) = |\Lambda(x)|^{-1} F(x), \quad (24)$$

appartiennent, pour tout $x \in [0, 1]$ à l'enveloppe convexe

$$\mathcal{W} := \left\{ W : W = \sum_{i=1}^N \alpha_i W_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}, \quad (25)$$

pour des matrices W_i , $i = 1, \dots, N$ données.

- ▶ Les inégalités matricielles pour la synthèse de contrôleurs peuvent être sur-approximées comme dans le cas de l'analyse.
- ▶ Les résultats précédents peuvent être adaptés avec le noyau $Q(x)$ affine.
- ▶ Dans le cas où F et Λ ne sont pas constantes les résultats de sur-approximations sont construits en supposant que les matrices paramétrées

$$W(x) = |\Lambda(x)|^{-1} F(x), \quad (24)$$

appartiennent, pour tout $x \in [0, 1]$ à l'enveloppe convexe

$$\mathcal{W} := \left\{ W : W = \sum_{i=1}^N \alpha_i W_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}, \quad (25)$$

pour des matrices W_i , $i = 1, \dots, N$ données.

- ▶ Les inégalités matricielles pour la synthèse de contrôleurs peuvent être sur-approximées comme dans le cas de l'analyse.
- ▶ Les résultats précédents peuvent être adaptés avec le noyau $Q(x)$ affine.
- ▶ Dans le cas où F et Λ ne sont pas constantes les résultats de sur-approximations sont construits en supposant que les matrices paramétrées

$$W(x) = |\Lambda(x)|^{-1} F(x), \quad (24)$$

appartiennent, pour tout $x \in [0, 1]$ à l'enveloppe convexe

$$\mathcal{W} := \left\{ W : W = \sum_{i=1}^N \alpha_i W_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}, \quad (25)$$

pour des matrices W_i , $i = 1, \dots, N$ données.

Plan

I. Calcul de fonctions Lyapunov par optimisation

II. Systèmes hyperboliques à commutation

III. Génération de trajectoire et poursuite

IV. Conclusion et perspectives

II Systèmes hyperboliques à commutation : contexte

Considérons le système hyperbolique suivant

$$\partial_t y(t, x) + \Lambda(t) \partial_x y(t, x) = 0, \quad (26)$$

$t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $y \in \mathbb{R}^n$ et

$$0_n < \Lambda(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Le phénomène de **commutation** apparaît dans la **condition frontière**

$$y(t, 0) = G_i y(t, 1), \quad (27)$$

où $i \in \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$. La **condition initiale** est définie par

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (28)$$

Notation.

$$\bar{\Lambda} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \Lambda(t) \quad (29)$$

$$\underline{\Lambda} = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \Lambda(t). \quad (30)$$

II Systèmes hyperboliques à commutation : contexte

Considérons le système hyperbolique suivant

$$\partial_t y(t, x) + \Lambda(t) \partial_x y(t, x) = 0, \quad (26)$$

$t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $y \in \mathbb{R}^n$ et

$$0_n < \Lambda(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Le phénomène de **commutation** apparaît dans la **condition frontière**

$$y(t, 0) = G_i y(t, 1), \quad (27)$$

où $i \in \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$. La **condition initiale** est définie par

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (28)$$

Notation.

$$\bar{\Lambda} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \Lambda(t) \quad (29)$$

$$\underline{\Lambda} = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \Lambda(t). \quad (30)$$

II Systèmes hyperboliques à commutation : contexte

Considérons le système hyperbolique suivant

$$\partial_t y(t, x) + \Lambda(t) \partial_x y(t, x) = 0, \quad (26)$$

$t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $y \in \mathbb{R}^n$ et

$$0_n < \Lambda(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Le phénomène de **commutation** apparaît dans la **condition frontière**

$$y(t, 0) = G_i y(t, 1), \quad (27)$$

où $i \in \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$. La **condition initiale** est définie par

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (28)$$

Notation.

$$\bar{\Lambda} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \Lambda(t) \quad (29)$$

$$\underline{\Lambda} = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \Lambda(t). \quad (30)$$

II Systèmes hyperboliques à commutation : contexte

Considérons le système hyperbolique suivant

$$\partial_t y(t, x) + \Lambda(t) \partial_x y(t, x) = 0, \quad (26)$$

$t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $y \in \mathbb{R}^n$ et

$$0_n < \Lambda(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Le phénomène de **commutation** apparaît dans la **condition frontière**

$$y(t, 0) = G_i y(t, 1), \quad (27)$$

où $i \in \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$. La **condition initiale** est définie par

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (28)$$

Notation.

$$\bar{\Lambda} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \Lambda(t) \quad (29)$$

$$\underline{\Lambda} = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \Lambda(t). \quad (30)$$

Signal de commutation

Le signal de commutation est continue par morceaux

$$\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}.$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+, \mathcal{I})$ l'ensemble des signaux de commutation tels que, sur chaque intervalle borné de \mathbb{R}^+ , **il y a un nombre fini** de points de discontinuités.

⇒ Essentiel pour prouver l'existence de solution.

[Hante, Leugering, Seidman ; 09]

Signal de commutation

Le signal de commutation est continue par morceaux

$$\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}.$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+, \mathcal{I})$ l'ensemble des signaux de commutation tels que, sur chaque intervalle borné de \mathbb{R}^+ , **il y a un nombre fini** de points de discontinuités.

⇒ Essentiel pour prouver l'existence de solution.

[Hante, Leugering, Seidman ; 09]

Signal de commutation

Le signal de commutation est continue par morceaux

$$\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}.$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+, \mathcal{I})$ l'ensemble des signaux de commutation tels que, sur chaque intervalle borné de \mathbb{R}^+ , **il y a un nombre fini** de points de discontinuités.

⇒ Essentiel pour prouver l'existence de solution.

[Hante, Leugering, Seidman ; 09]

Motivations

- ▶ Considérer des contrôleurs discontinus \Rightarrow + de degrés de liberté / contrôleurs continus
- ▶ \Rightarrow meilleure vitesse de convergence [Suvarov et al. ; 12]

Inconvénient : question de l'existence de solutions difficile pour les systèmes commutés en dimension infinie.

Voir par exemple [Hante, Sigalotti ; 11], [Daafouz, Valein, Tucsnaç ; 14]

Dans la littérature

Il existe peu de travaux pour le cas **linéaire**.

Premiers travaux pour la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+, \mathcal{I})$.

Leur objectif : condition sur G_i pour qu'il **existe** une solution **stable** au système (26)–(28).

[Hante, Leugering, Seidman ; 09], [Amin, Hante, Bayen ; 12],

[Suvarov et al. ; 12], [Prieur, Girard, Witrant ; 14]

Objectif : stabilisation

Ne pas considérer un ensemble de signaux de commutation, mais **construire une loi de retour commutée** pour stabiliser le système

Stabilisation

Construire $\sigma = \sigma[y]$ tel que $\exists \alpha > 0$ et une fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tels que la solution de (26)–(28) existe et l'inégalité

$$\|y(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \leq e^{-\alpha t} g\left(\|y^0\|_{L^2(0,1)}\right), \quad (31)$$

est satisfaite $\forall t \geq 0$.

Objectif : stabilisation

Ne pas considérer un ensemble de signaux de commutation, mais **construire une loi de retour commutée** pour stabiliser le système

Stabilisation

Construire $\sigma = \sigma[y]$ tel que $\exists \alpha > 0$ et une fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tels que la solution de (26)–(28) existe et l'inégalité

$$\|y(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \leq e^{-\alpha t} g\left(\|y^0\|_{L^2(0,1)}\right), \quad (31)$$

est satisfaite $\forall t \geq 0$.

Stabilisabilité

On considère la fonction Lyapunov (5) avec le noyau exponentiel.

On a

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -2 \int_0^1 y(t, x)^\top Q \Lambda(t) \partial_x y(t, x) e^{-\mu x} dx \\
 &= - \left[y(t, x)^\top Q \Lambda(t) y(t, x) e^{-\mu x} \right]_0^1 \\
 &\quad - \mu \int_0^1 y(t, x)^\top Q \Lambda(t) y(t, x) e^{-\mu x} dx \\
 &\leq y(t, 1)^\top \left[G_i^\top Q \bar{\Lambda} G_i - Q \underline{\Lambda} e^{-\mu} \right] y(t, 1) - \mu \lambda V.
 \end{aligned}$$

avec $\lambda = \min \text{spec}(\underline{\Lambda})$.

Soit la *valeur de mesure* définie par $w(t) = y(t, 1)$ et $\alpha = \frac{1}{2}\lambda\mu$ on a

Lemme

$$\dot{V} \leq -2\alpha V + q_i(w(t))$$

où $q_i(w(t)) = w(t)^\top [G_i^\top Q \bar{\Lambda} G_i - Q \underline{\Lambda} e^{-\mu}] w(t)$.

Avec ce lemme il est naturel de considérer la loi de commutation pour les systèmes temps discret en dimension finie [Geromel, Colaneri ; 06]

$$\sigma[w](t) = \arg \min_{i \in \mathcal{I}} q_i(w(t)) \quad (32)$$

On définit le simplexe

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1, \gamma_i \geq 0 \right\}. \quad (33)$$

Soit la *valeur de mesure* définie par $w(t) = y(t, 1)$ et $\alpha = \frac{1}{2}\lambda\mu$ on a

Lemme

$$\dot{V} \leq -2\alpha V + q_i(w(t))$$

où $q_i(w(t)) = w(t)^\top [G_i^\top Q \bar{\Lambda} G_i - Q \underline{\Lambda} e^{-\mu}] w(t)$.

Avec ce lemme il est naturel de considérer la loi de commutation pour les systèmes temps discret en dimension finie [Geromel, Colaneri; 06]

$$\sigma[w](t) = \arg \min_{i \in \mathcal{I}} q_i(w(t)) \quad (32)$$

On définit le simplexe

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1, \gamma_i \geq 0 \right\}. \quad (33)$$

Soit la *valeur de mesure* définie par $w(t) = y(t, 1)$ et $\alpha = \frac{1}{2}\lambda\mu$ on a

Lemme

$$\dot{V} \leq -2\alpha V + q_i(w(t))$$

où $q_i(w(t)) = w(t)^\top [G_i^\top Q \bar{\Lambda} G_i - Q \underline{\Lambda} e^{-\mu}] w(t)$.

Avec ce lemme il est naturel de considérer la loi de commutation pour les systèmes temps discret en dimension finie [Geromel, Colaneri; 06]

$$\sigma[w](t) = \arg \min_{i \in \mathcal{I}} q_i(w(t)) \quad (32)$$

On définit le simplexe

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1, \gamma_i \geq 0 \right\}. \quad (33)$$

Hypothèse 1

Il existe $\gamma \in \Gamma$, une mat. diag. déf. pos. Q et $\mu > 0$ tels que

$$\sum_{j=1}^N \gamma_j \left(G_j^\top Q \bar{\Lambda} G_j - e^{-\mu} Q \underline{\Lambda} \right) \leq 0.$$

Proposition (Lamare, Girard, Prieur, SICON 2015)

Sous l'hypothèse 1, le système (26)–(28) avec la loi de commutation (32) est GES **tant que la solution existe**. Soit V comme proposée, $\exists c > 0$ tel que l'inégalité suivante

$$|y(\cdot, t)|_{L^2(0,1)} \leq ce^{-\mu\lambda t} |y^0|_{L^2(0,1)}, \quad (34)$$

est satisfaite tant que la solution existe.

Hypothèse 1

Il existe $\gamma \in \Gamma$, une mat. diag. déf. pos. Q et $\mu > 0$ tels que

$$\sum_{j=1}^N \gamma_j \left(G_j^\top Q \bar{\Lambda} G_j - e^{-\mu} Q \underline{\Lambda} \right) \leq 0.$$

Proposition (Lamare, Girard, Prieur, SICON 2015)

Sous l'hypothèse 1, le système (26)–(28) avec la loi de commutation (32) est GES **tant que la solution existe**. Soit V comme proposée, $\exists c > 0$ tel que l'inégalité suivante

$$|y(\cdot, t)|_{L^2(0,1)} \leq c e^{-\mu \lambda t} |y^0|_{L^2(0,1)}, \quad (34)$$

est satisfaite tant que la solution existe.

Inconvénients

- ▶ Risque d'une fréquence élevée de commutations.
- ▶ Risque d'accumulation de commutation à un point donné du temps \Rightarrow plus d'existence globale en temps.

Solution : ajout d'un hystérésis

$$\sigma[w](t) = \begin{cases} \sigma[w](t^-), & \text{si } q_{\sigma[w](t^-)}(w(t)) < \varepsilon(t) \\ \arg \min_{i \in \mathcal{I}} q_i(w(t)), & \text{si } q_{\sigma[w](t^-)}(w(t)) = \varepsilon(t) \end{cases}, \quad (35)$$

avec

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\eta \varepsilon(t). \quad (36)$$

où $\eta > 0$ et $\varepsilon(0) > 0$.

La fonction ε est essentielle pour prouver l'existence de solutions.

Il peut être prouvé qu'avec $\varepsilon(t) \equiv 0$ l'existence d'une solution globale en temps n'est pas assurée en général.

Solution : ajout d'un hystérésis

$$\sigma[w](t) = \begin{cases} \sigma[w](t^-), & \text{si } q_{\sigma[w](t^-)}(w(t)) < \varepsilon(t) \\ \arg \min_{i \in \mathcal{I}} q_i(w(t)), & \text{si } q_{\sigma[w](t^-)}(w(t)) = \varepsilon(t) \end{cases}, \quad (35)$$

avec

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\eta \varepsilon(t). \quad (36)$$

où $\eta > 0$ et $\varepsilon(0) > 0$.

La fonction ε est essentielle pour prouver l'existence de solutions.

Il peut être prouvé qu'avec $\varepsilon(t) \equiv 0$ l'existence d'une solution globale en temps n'est pas assurée en général.

Théorème (Lamare, Girard, Prieur, SICON 2015)

Sous l'hypothèse 1, le système (26)–(28) avec la loi de commutation (35) est globalement exponentiellement convergent.

Soit V comme proposée, $\exists c > 0$, $\alpha > 0$ tels que la solution de (26)–(28) satisfait l'inégalité

$$\|y(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \leq ce^{-\alpha t} \left(\|y^0\|_{L^2(0,1)} + \varepsilon(0) \right), \quad (37)$$

$\forall t \geq 0$.

Hypothèse 2

Il existe $\gamma \in \Gamma$, une matrice diagonale définie positive Q et un paramètre $\mu > 0$ tels que

$$\sum_{j=1}^N \gamma_j \left(G_j^T Q \bar{\Lambda} G_j - e^{-\mu} Q \underline{\Lambda} \right) < 0.$$

Robustesse

Considérons la version modifiée de la loi de commutation précédente

$$\sigma[v](t) = \begin{cases} \sigma[v](t^-), & \text{si } q_{\sigma[v](t^-)}(v(t)) \leq -\gamma\|v\|^2 + \varepsilon(t) \\ \arg \min_{i \in \mathcal{I}} q_i(v(t)), & \text{si } q_{\sigma[v](t^-)}(v(t)) \geq -\gamma\|v\|^2 + \varepsilon(t) \end{cases}$$

avec $v(t) = w(t) + \delta(t)$ où δ est un bruit de mesure par rapport à w tel que

$$\|\delta(t)\| \leq \rho\|w(t)\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (38)$$

Pour ρ suffisamment petit et sous l'hypothèse 2, le système (26)–(28) **reste exponentiellement convergent** (Chapitre 2).

Stabilité Entrée-État (ISS)

Définition

Le système (26)–(28) est *Entrée-État Stable* si $\exists \alpha > 0$, une fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ et une fonction h de classe \mathcal{K}_∞ , tels que $\forall y^0 \in C_{lpw}([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ et $\forall \delta \in C_{rpw}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, la solution de (26)–(28) existe $\forall t \in \mathbb{R}^+$ et

$$\|y(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)} \leq e^{-\alpha t} g\left(\|y^0\|_{L^2(0,1)}\right) + h(\|\delta\|_{L^\infty}). \quad (39)$$

Sous l'hypothèse 2, le système (26)–(28) est **Entrée-État Stable** (Chapitre 2).

Tests numériques

$$\blacktriangleright \Lambda(t) = \begin{bmatrix} 0.5+0.05 \sin(10t) & 0 \\ 0 & 0.5+0.05 \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright G_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright G_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & -1.05 \end{bmatrix}$$

Données du système hyperbolique linéaire.

$$\blacktriangleright \rho = 7\%, \delta(t) = |w(t)| \rho [\cos(t), \sin(t)]^\top$$

$$\blacktriangleright Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.0434 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright \mu = 0.1$$

$$\blacktriangleright \gamma_1 = 0.45 \text{ et } \gamma_2 = 0.55$$

$$\blacktriangleright y^0(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \sin(3\pi x) \\ \sqrt{2} \sin(4\pi x) \end{bmatrix}$$

Tests numériques

▶ $\Lambda(t) = \begin{bmatrix} 0.5+0.05 \sin(10t) & 0 \\ 0 & 0.5+0.05 \cos(t) \end{bmatrix}$ Hypothèse 2 satisfaite, en effet

▶ $G_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$

▶ $G_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & -1.05 \end{bmatrix}$

▶ $\rho = 7\%$, $\delta(t) = |w(t)| \rho [\cos(t), \sin(t)]^\top$

▶ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.0434 \end{bmatrix}$

▶ $\mu = 0.1$

▶ $\gamma_1 = 0.45$ et $\gamma_2 = 0.55$

▶ $y^0(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \sin(3\pi x) \\ \sqrt{2} \sin(4\pi x) \end{bmatrix}$

$$A = \sum_{i=1}^2 \gamma_i \left(G_i^\top Q \bar{\Lambda} G_i - e^{-\mu} Q \underline{\Lambda} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0375 & 0.0257 \\ 0.0257 & -0.0223 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A) = \{-0.0567; -0.0031\}$$

Tests numériques

$$\blacktriangleright \Lambda(t) = \begin{bmatrix} 0.5+0.05 \sin(10t) & 0 \\ 0 & 0.5+0.05 \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright G_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright G_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & -1.05 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright \rho = 7\%, \delta(t) = |w(t)| \rho [\cos(t), \sin(t)]^\top$$

$$\blacktriangleright Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.0434 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright \mu = 0.1$$

$$\blacktriangleright \gamma_1 = 0.45 \text{ et } \gamma_2 = 0.55$$

$$\blacktriangleright y^0(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \sin(3\pi x) \\ \sqrt{2} \sin(4\pi x) \end{bmatrix}$$

Condition Initiale

Tests numériques

Système non-commuté instable avec G_1

$$\blacktriangleright \Lambda(t) = \begin{bmatrix} 0.5+0.05 \sin(10t) & 0 \\ 0 & 0.5+0.05 \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright G_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright G_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & -1.05 \end{bmatrix}$$

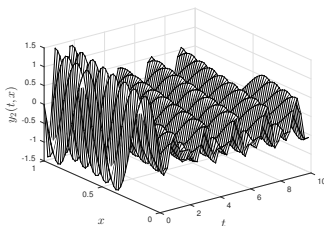
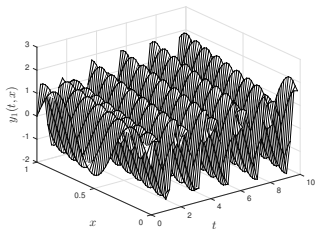
$$\blacktriangleright \rho = 7\%, \delta(t) = |w(t)| \rho [\cos(t), \sin(t)]^\top$$

$$\blacktriangleright Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.0434 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright \mu = 0.1$$

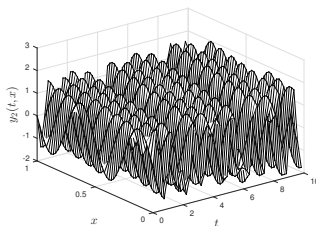
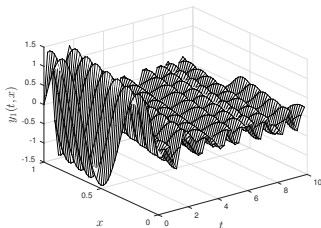
$$\blacktriangleright \gamma_1 = 0.45 \text{ et } \gamma_2 = 0.55$$

$$\blacktriangleright y^0(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \sin(3\pi x) \\ \sqrt{2} \sin(4\pi x) \end{bmatrix}$$



Tests numériques

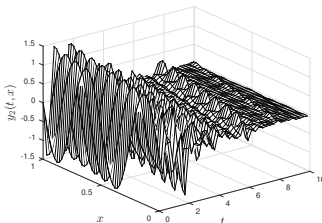
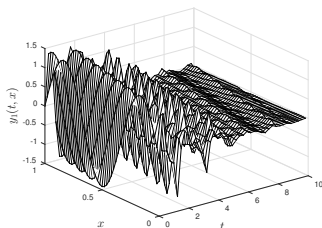
- ▶ $\Lambda(t) = \begin{bmatrix} 0.5+0.05 \sin(10t) & 0 \\ 0 & 0.5+0.05 \cos(t) \end{bmatrix}$
- ▶ $G_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$
- ▶ $G_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & -1.05 \end{bmatrix}$
- ▶ $\rho = 7\%$, $\delta(t) = |w(t)| \rho [\cos(t), \sin(t)]^\top$
- ▶ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.0434 \end{bmatrix}$
- ▶ $\mu = 0.1$
- ▶ $\gamma_1 = 0.45$ et $\gamma_2 = 0.55$
- ▶ $y^0(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \sin(3\pi x) \\ \sqrt{2} \sin(4\pi x) \end{bmatrix}$

Système non-commuté instable avec G_2 

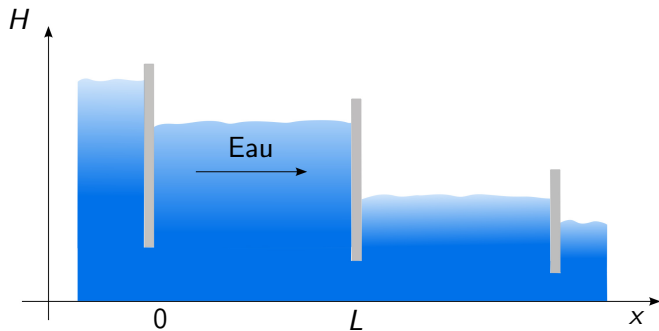
Tests numériques

- ▶ $\Lambda(t) = \begin{bmatrix} 0.5+0.05 \sin(10t) & 0 \\ 0 & 0.5+0.05 \cos(t) \end{bmatrix}$
- ▶ $G_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$
- ▶ $G_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & -1.05 \end{bmatrix}$
- ▶ $\rho = 7\%$, $\delta(t) = |w(t)| \rho [\cos(t), \sin(t)]^\top$
- ▶ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.0434 \end{bmatrix}$
- ▶ $\mu = 0.1$
- ▶ $\gamma_1 = 0.45$ et $\gamma_2 = 0.55$
- ▶ $y^0(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \sin(3\pi x) \\ \sqrt{2} \sin(4\pi x) \end{bmatrix}$

Stabilité robuste



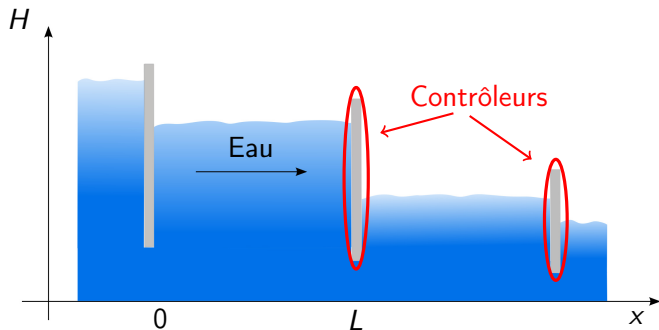
Commutation pour le contrôle d'un réseau de canaux



Le modèle satisfait les équations non-linéaires de Saint-Venant

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} H_j \\ V_j \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} H_j V_j \\ \frac{V_j^2}{2} + gH_j \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, \dots, \mathcal{M}. \quad (40)$$

Commutation pour le contrôle d'un réseau de canaux



Le modèle satisfait les équations non-linéaires de Saint-Venant

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} H_j \\ V_j \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} H_j V_j \\ \frac{V_j^2}{2} + gH_j \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, \dots, \mathcal{M}. \quad (40)$$

Réécriture du modèle

- ▶ Linéarisation
- ▶ Changement de variable, passage en **coordonnées de Riemann**
- ▶ Choix de contrôleurs pour avoir

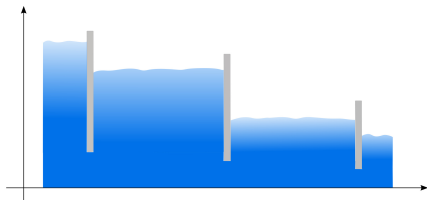
$$y(t, 0) = G_i y(t, 1).$$

$$\Rightarrow G_i = G(k_i), k_i \text{ est un gain}$$

[Bastin, Coron, d'Andréa-Novel ; 09]

Simulation

- ▶ Longueur : $L = 1000\text{m}$
- ▶ Largeur : $l = 1\text{m}$
- ▶ $g = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- ▶ $\mu_0 = 0.4$
- ▶ $H_{down} = 1\text{m}$
- ▶ $(H_1^*, H_2^*) = (2.5, 1) \text{ m}$
- ▶ $Q^* = 1 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$
- ▶ $(H_1(0, x), H_2(0, x)) = (4, 1.4) \text{ m}$
- ▶ $Q(0, x) = 2 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$
- ▶ $(k_1^1, k_2^1) = (1, 0.2)$
- ▶ $(k_1^2, k_2^2) = (0.2, 1)$



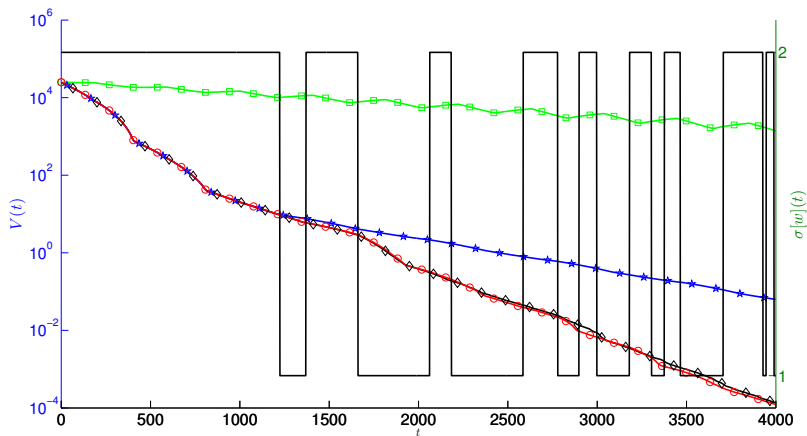


Figure: Évolution de la fonction Lyapunov pour différente stratégie de contrôle.

Plan

I. Calcul de fonctions Lyapunov par optimisation

II. Systèmes hyperboliques à commutation

III. Génération de trajectoire et poursuite

IV. Conclusion et perspectives

III Génération de trajectoire et poursuite (Chapitre 3)

Collaboration avec Nikolaos Bekiaris-Liberis, séjour Université de Californie à Berkeley (2014), groupe Pr. Alexandre Bayen.

Soit le système

$$\partial_t y_1(t, x) + \varepsilon_1(x) \partial_x y_1(t, x) = \gamma_1(x) y_2(t, x) \quad (41)$$

$$\partial_t y_2(t, x) - \varepsilon_2(x) \partial_x y_2(t, x) = \gamma_2(x) y_1(t, x) \quad (42)$$

avec les conditions frontières

$$y_1(t, 0) = q y_2(t, 0) \quad (43)$$

$$y_2(t, 1) = U(t) \quad (44)$$

$$z(t) = y_2(t, 0). \quad (45)$$

Objectif : $z(t) \rightarrow z^r(t)$

Solution : backstepping.

Poursuite

L'erreur par rapport à la trajectoire de référence $(y_1^r, y_2^r)^\top$

$$u(t, x) = y_1(t, x) - y_1^r(t, x)$$

$$v(t, x) = y_2(t, x) - y_2^r(t, x),$$

donne la dynamique

$$\partial_t u(t, x) + \varepsilon_1(x) \partial_x u(t, x) = \gamma_1(x) v(t, x) \quad (46)$$

$$\partial_t v(t, x) - \varepsilon_2(x) \partial_x v(t, x) = \gamma_2(x) u(t, x) \quad (47)$$

$$u(t, 0) = qv(t, 0) \quad (48)$$

$$v(t, 1) = \tilde{U}(t), \quad (49)$$

où $\tilde{U} = U - U^r$.

On utilise le contrôleur

$$\tilde{U}(t) = -k_P v(t, 0) - k_I \eta(t) \quad (50)$$

où

$$\dot{\eta}(t) = v(t, 0), \quad (51)$$

et $\eta(0) = \eta^0 \in \mathbb{R}$.

Objectif : analyser la stabilité du système augmenté $(u, v, \eta)^\top$.

Solution : Analyse Lyapunov.

La stabilité du système augmenté (u, v, η) ne peut pas être analysée avec une fonction Lyapunov « diagonale ».

⇒ Ajouter un terme croisé dans V .

$$V(u, v, \eta) = \int_0^1 \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ \eta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{e^{-\mu x}}{\varepsilon_1(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \beta \frac{e^{\mu x}}{\varepsilon_2(x)} & \frac{\gamma e^{\nu x}}{2\varepsilon_2(x)} \\ 0 & \frac{\gamma e^{\nu x}}{2\varepsilon_2(x)} & \frac{\rho}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ \eta \end{bmatrix} dx$$

Compensation de perturbations

Soit le système

$$\partial_t y_1(t, x) + \varepsilon_1(x) \partial_x y_1(t, x) = \gamma_1(x) y_2(t, x) + d_1(x) \quad (52)$$

$$\partial_t y_2(t, x) - \varepsilon_2(x) \partial_x y_2(t, x) = \gamma_2(x) y_1(t, x) + d_2(x) \quad (53)$$

$$y_1(t, 0) = q y_2(t, 0) + d_3 \quad (54)$$

$$y_2(t, 1) = U(t) + d_4. \quad (55)$$

L'action intégrale compense les erreurs en la sortie $z(t)$.

Voir [Lamare, Bekiaris-Liberis; SCL 15, à paraître]

Illustration

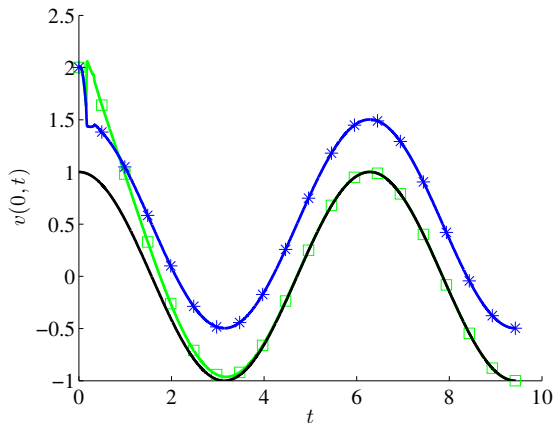


Figure: Sortie $v(t, 0)$ du système perturbé pour les équations Aw-Rascle-Zhang.

Plan

I. Calcul de fonctions Lyapunov par optimisation

II. Systèmes hyperboliques à commutation

III. Génération de trajectoire et poursuite

IV. Conclusion et perspectives

Conclusion

- ▶ Analyse de systèmes hyperboliques par méthode Lyapunov
- ▶ Méthode numérique pour leur analyse
- ▶ Extension du contrôle à des signaux de commutation
- ▶ Génération de trajectoire et poursuite

Perspectives

- ▶ Généralisation des résultats en présence d'un terme source commuté

$$\partial_t y + \Lambda_i \partial_x y = F_i y .$$

- ▶ Généralisation à des systèmes hyperbolique quasilinéaires

$$\partial_t y + \Lambda_i(y) \partial_x y = F_i y ,$$

avec

$$B(y(t, 0), y(t, 1)) = 0 .$$

Stabilité en norme C^0 , C^1 ?

Perspectives

- ▶ Généralisation des résultats en présence d'un terme source commuté

$$\partial_t y + \Lambda_i \partial_x y = F_i y .$$

- ▶ Généralisation à des systèmes hyperbolique quasilineaires

$$\partial_t y + \Lambda_i(y) \partial_x y = F_i y ,$$

avec

$$B(y(t, 0), y(t, 1)) = 0 .$$

Stabilité en norme C^0 , C^1 ?